TEMA 5

1ª LEY DE LA TERMODINÁMICA PARA SISTEMAS ABIERTOS CON GASES IDEALES Y REALES

SISTEMA TERMODINÁMICO

Un sistema termodinámico abierto es la porción del universo en la cual se desarrolla un fenómeno termodinámico, para cuyo análisis se le efectúa un balance de masa, de energía y de entropía, evaluando los flujos de masa y las transferencias de energía en forma de calor y/o trabajo, que cruzan la frontera del sistema. A continuación se desarrollan los modelos matemáticos del Principio de la Conservación de la Masa, y de la 1ª y la 2ª leyes de la Termodinámica para un sistema termodinámico abierto empleando el método del Volumen de Control (VC).

PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA MASA

En la Termodinámica Clásica los efectos relativistas son despreciables, por lo que se considera que la masa se conserva, aun cuando se trate de un sistema abierto, lo cual se cumple al aplicar el método del Volumen de Control, que en este caso resulta ser de masa de control.

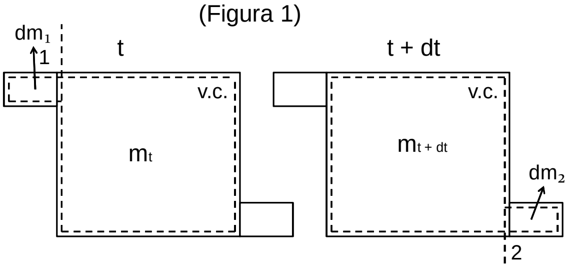
En la siguiente figura (1) se muestra con una línea punteada el espacio que se aisla del resto del universo para efectuar el balance del flujo de masa a través de la frontera del sistema así como un análisis de la variación de masa contenida en el interior del Volumen de Control y obtener la Ecuación de Continuidad. Por simplicidad, en la Fig. 1 se muestra una entrada y una salida, pero los resultados se generalizan para "m" salidas y "n" entradas.

Posteriormente se asociará la Ecuación de Continuidad a los balances de energía y entropía que se realizan al sistema termodinámico abierto, cuando se aplican la 1ª y la 2ª leyes de la .Termodinámica.

ANÁLISIS DE LA MASA DE CONTROL.

Con el fin de simplificar, consideremos el siguiente volumen de control, con una entrada y una salida.

(Figura 1)



$m_t = m_{vc)t} + dm_1$ $\qquad$ $m_{t+dt} = m_{vc)t+dt} + dm_2$

PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA MASA

$$m_t = m_{t+dt}$$

$$m_{vc)t} + dm_1 = m_{vc)t+dt} + dm_2$$

$$m_{vc)t+dt} - m_{vc)t} + dm_2 - dm_1 = 0 \ \ldots \ (1)$$

$$m_{vc)t+dt} - m_{vc)t} = dm)_{vc}$$

De la definición de densidad, la variación de masa en el volumen de control se puede expresar como:

$$\rho = \frac{dm}{dV}; \quad dm)_{vc} = \rho dV)_{vc}$$

$$m_{vc)t+dt} - m_{vc)t} = \rho dV)_{vc}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (1) y dividiendo entre «dt», se obtiene la expresión matemática de la Ecuación de la Continuidad en su forma diferencial.

$$\frac{\rho dV}{dt}\Bigg]_{vc} + \frac{dm_2}{dt} - \frac{dm_1}{dt} = 0 \; \ldots \; (2)$$

A continuación se desarrolla la ecuación anterior en su forma integral para su aplicación en los procesos finitos de los sistemas termodinámicos,

El desarrollo de la ecuación (2) a su forma integral se hace por partes, iniciando con la variación de masa en el Volumen de Control al aplicarle el operador derivada y el operador integral, simultáneamente como se indica en la siguiente diapositiva, para posteriormente desarrollar los términos correspondientes a los flujos de masa que cruzan la frontera del sistema.

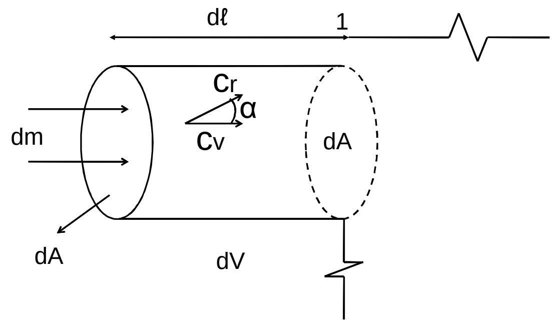
La variación de masa en el volumen de control:

$$\frac{dm}{dt}\Bigg]_{vc} = \frac{1}{dt}\rho dV\Bigg]_{vc} = \frac{d}{dt}\left(\iiint_{vc} \rho dV\right)$$

$\frac{d}{Dt}\left(\iiint_{vc} \rho dV\right)$ evalúa la variación de masa en el interior del Volumen de Control.

A continuación se desarrolla la ecuación de la evaluación del flujo de masa a través de la frontera del sistema:

$$dm = \rho dV = \rho d\vec{\ell} dA$$



$$dm = \rho dV = \rho d\ell dA$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \frac{\rho d\ell}{dt} dA$$

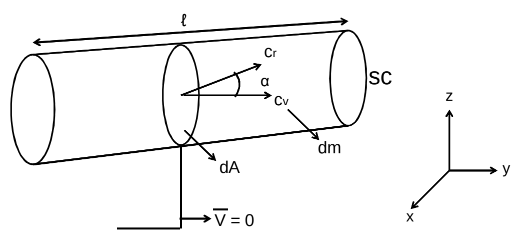
$$\frac{dm}{dt} = \rho \bar{c}_v dA$$

$$c_v = \bar{c}_r \cos\alpha$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho \bar{c}_r \cos\alpha dA$$

Integrabdo la ecuación anterior en la Superficie de Control (SC) en la frontera del sistema:

$$\iint_{sc} \frac{dm}{dt} = \iint_{sc} \rho c_r \cos\alpha dA$$



Si el análisis anterior se efectúa para la entrada y la salida que se indica en la Fig.1, las ecuaciones correspondientes se expresan de la siguiente manera:

$$\iint_{sc} \rho c_r \cos\alpha dA)_2 - \iint_{sc} \rho c_r \cos\alpha dA)_1$$

En el entendido que con el término de salida “2” se representan a todos los flujos de salida del sistema, y de igual manera, con el término ”1” se representan a todos los flujos de entrada del sistema. Por otra parte, si se integra en toda la Superficie de Control la ecuación anterior queda:

$$\iint_{sc} \rho c_r \cos\alpha dA)_2 - \iint_{sc} \rho c_r \cos\alpha dA)_1 = \oiint_{sc} \rho c_r \cos\alpha dA$$

Sustituyendo en la ecuación (2) la variación de masa en el Volumen de Control y esta ecuación:

$$\boxed{\oiint_{sc} \rho c_r \cos\alpha dA + \frac{d}{dt} \iiint_{vc} \rho dV = 0 \ldots (3)}$$

ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD EN SU FORMA INTEGRAL

1ª LEY DE LA TERMODINÁMICA

Esta Ley se fundamenta en el:

PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA:

“LA ENERGÍA NO SE CREA NI SE DESTRUYE, SÓLO SE TRANSFORMA.”

Que aplicado a un sistema termodinámico se puede expresar como:

La energía total transferida en forma de calor y de trabajo a un sistema termodinámico (suma algebraica del calor y del trabajo que entra y sale) es igual a la variación de la energía como propiedad del sistema (suma algebraica de las variaciones de energía cinética, energía potencial y energía interna), lo que se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$\text{đ}Q + \text{đ}W = dE)_{SIST.} \ldots (4)$$

En la siguiente diapositiva se esquematiza el sistema termodinámico y las expresiones de la 1ª Ley de la Termodinámica en sus formas diferencial, integral y de evaluación en procesos finitos.

SISTEMA TERMODINÁMICO

MEDIO AMBIENTE

$$\text{đ}Q + \text{đ}W = dEC + dEP + dU$$

$\overset{(+)}{Q}, \overset{(+)}{W}$ → $\overset{(+)}{\text{đ}Q}, \overset{(+)}{\text{đ}W}$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{\Delta\ \Delta E)_{SIST} = \Delta EC_{12} + \Delta EP_{12} + \Delta U_{12}} \\ \mathbf{dE)SIST = dEC + dEP + dU} \end{array}}$$

→ $\overset{(-)}{Q}, \overset{(-)}{W}$ $\overset{(-)}{\text{đ}Q}, \overset{(-)}{\text{đ}W}$

FRONTERA

$$\int \text{đ}Q + \int \text{đ}W = \int dEC + \int dEP + \int dU$$

$${}_1Q_2 + {}_1W_2 = \Delta E_{12})_{SIST} = \Delta EC_{12} + \Delta EP_{12} + \Delta U_{12}$$

PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En la Termodinámica Clásica los efectos relativistas son despreciables, por lo que se considera que la energía se conserva, aun cuando se trate de un sistema abierto, ya que los flujos de masa tienen velocidades que son muy inferiores a las de la luz.

En la Fig. (2) se delimita con una línea punteada el espacio que se aisla del resto del universo para aplicar el método del Volumen de Control y efectuar el balance de energía que como calor y trabajo transferido a través de la frontera del sistema hace variar la energía como propiedad del sistema.

Con el análisis de la variación de la energía como propiedad del sistema, tanto la contenida en el interior del Volumen de Control como la asociada a los flujos de masa que cruzan sus fronteras, se obtendrá la expresión de la 1ª Ley de la Termodinámica. Por simplicidad, en la Fig. (2) se muestra una entrada y una salida, pero los resultados se generalizan para "m" salidas y "n" entradas.

Para la obtención del modelo matemático de la 1ª Ley de la Termodinámica es fundamental la utilización de la Ecuación de la Continuidad en los balances de energía que se realizan al sistema termodinámico abierto.

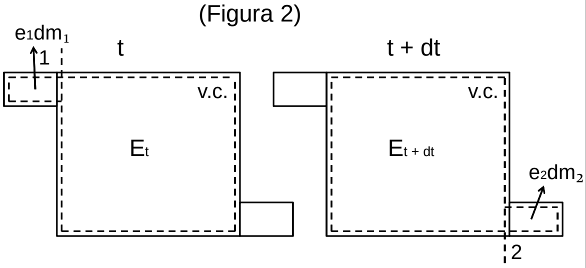
A continuación se aplica el Principio de la Conservación de la Energía al sistema termodinámico abierto representado en la figura (2), aplicando la metodología del Volumen de Control a las transferencias de calor y de trabajo de eje que cruzan la frontera del sistema y que hace variar, tanto la energía asociada a la masa dentro del Volumen de Control, así como a las energías asociadas a los flujos de masa que atraviesan la frontera del sistema.

El análisis energético se realiza durante el tiempo «dt», para obtener la rapidez de variación de la energía como propiedad del sistema debido a la transferecia de potencia como calor y trabajo.

ANÁLISIS DE VOLUMEN DE CONTROL.

Con el fin de simplificar, consideremos el siguiente Volumen de Control, con una entrada y una salida.

(Figura 2)



$E_t = E_{vc)t} + e_1dm_1$ $\quad E_{t+dt} = E_{vc)t+dt} + e_2dm_2$

La variación de la energía como propiedad del sistema en la diferencial de tiempo es:

$$\frac{dE)_{SIST.}}{dt} = \frac{E_{t+dt} - E_t}{dt} \dots (5)$$

Desarrollando términos:

$$E_t = E_{t)vc} + e_1dm_1$$

$$E_{t+dt} = E_{t+dt)vc} + e_2dm_2$$

$$dE)_{SIST.} = E_{t+dt} - E_t = E_{t+dt)vc} + e_2dm_2 - E_{t)vc} - e_1dm_1$$

Sustituyendo la expresión anterior en (5)

$$\frac{dE)_{SIST.}}{dt} = \frac{E_{t+dt)VC} - E_{t)vc}}{dt} + \frac{e_2dm_2 - e_1dm_1}{dt} \dots (5`)$$

Aplicando la Ecuación de la Continuidad para el flujo de masa en las fronteras del sistema:

$$\frac{edm}{dt} = \iint_{sc} e\rho c_r \cos\alpha dA$$

Por lo tanto:

$$\frac{e_2dm_2 - e_1dm_1}{dt} = \oiint_{sc} e\rho c_r \cos\alpha dA \dots (6)$$

La variación de masa en el Volumen de Control:

$$\left.\frac{E_{t+dt)vc} - E_{t)vc}}{dt}\right]_{vc} = \left.\frac{dE}{dt}\right]_{vc} = \left.\frac{edm}{dt}\right]_{vc} = \left.\frac{e\rho dV}{dt}\right]_{vc}$$

Aplicando la Ecuación de la Continuidad a la variación de energía dentro del Volumen de Control, la ecuación anterior queda:

$$\frac{1}{dt}\rho dV = \frac{d}{dt}\oiiint_{vc}\rho dV$$

Por lo que:

$$\left.\frac{E_{t+dt)vc} - E_{t)vc}}{dt}\right]_{vc} = \frac{d}{dt}\oiiint_{vc} e\rho dV \; \ldots \; (7)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (5`) se obtiene la variación de la energía como propiedad del sistema:

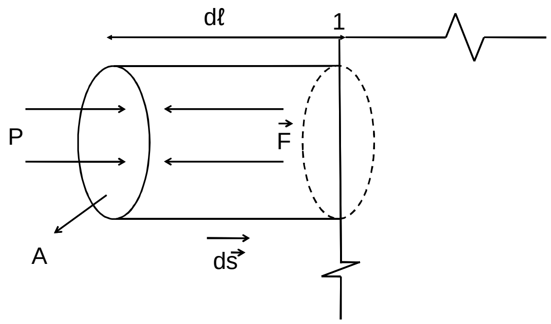
$$\frac{dE)_{sist}}{dt} = \frac{d}{dt}\oiiint_{vc} e\rho dV + \oiint_{se} e\rho c_r \cos\alpha dA \; \ldots \; (8)$$

Con respecto al término $đW$ de la Ec. (4) incluye al trabajo de flujo $đW_f$ y el trabajo de eje $đW_{eje}$

$$đW = đW_f + đW_{eje} \; \ldots \; (9)$$

El trabajo de flujo se evalúa a continuación:

$$đW_f = \vec{F} \bullet \vec{ds}$$



$$\vec{F} \bullet \vec{ds} = |\vec{F}|\,|\vec{ds}|\cos\alpha$$

$$|\vec{F}| = PA \text{ y } \cos\alpha = -1$$

$$|\vec{ds}| = d\ell$$

Sustituyendo:

$$\vec{F} \bullet \vec{ds} = -PAd\ell = -PdV$$

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

$$đW_f = -P\frac{dm}{\rho}$$

Por lo tanto, para las secciones (1) y (2) de la figura 1

$$đW_{f1} = -Pvdm)_1$$

y

$$đW_{f2} = -Pvdm)_2$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación (9) y dividiendo entre "dt"

$$\frac{đW}{dt} = \frac{đW_{eje}}{dt} + \frac{Pvdm)_1}{dt} - \frac{Pvdm)_2}{dt} \; \ldots \; (10)$$

De la Ecuación de la Continuidad se tiene:

$$\frac{Pvdm)_1}{dt} = \iint_{sc} Pv\rho c_r \cos\alpha dA)_1$$

Análogamente para la sección (2)

$$\frac{Pvdm)_2}{dt} = \iint_{sc} Pv\rho c_r \cos\alpha dA)_2$$

Sustituyendo las dos Ec. anteriores en (10)

$$\frac{đW}{dt} = \frac{đW_{eje}}{dt} + \iint_{sc} Pv\rho c_r \cos\alpha dA)_1 - \iint_{sc} Pv\rho c_r \cos\alpha dA)_2 \ldots(11)$$

Sustituyendo (8) y (11) en (4) dividida entre dt, se tiene:

$$\frac{đQ}{dt} + \frac{đW_{eje}}{dt} + \iint_{sc} Pv\, \rho c_r \cos\alpha dA)_1 - \iint_{sc} Pv\, \rho c_r \cos\alpha dA)_2 =$$

$$\frac{d}{dt} \oiiint_{vc} e\rho dV + \oiint_{sc} e\rho c_r \cos\alpha dA$$

Integrando en la superficie cerrada el trabajo de flujo:

$$\frac{đQ}{dt} + \frac{đW_{eje}}{dt} + \oiint_{sc} Pv\, \rho c_r \cos\alpha dA =$$

$$\frac{d}{dt} \oiiint_{vc} e\rho dV + \oiint_{sc} e\rho c_r \cos\alpha dA$$

Si se define:

$$\frac{đQ}{dt} = \dot{Q}; \qquad \frac{đW_{eje}}{dt} = \dot{W}_{eje}$$

Agrupando los términos del trabajo de flujo con la variación de energía en las fronteras:

$$\boxed{\dot{Q} + \dot{W}_{eje} = \frac{d}{dt} \oiiint_{vc} e\rho dV + \oiint_{sc} (e + Pv)\rho c_r \cos\alpha dA}$$

1ª Ley de la Termodinámica para sistemas abiertos

CONDICIONES DE OPERACIÓN DE FLUJO Y ESTADO ESTABLE PARA LAS TURBOMÁQUINAS (TM)

1. El volumen del control se fija al sistema coordenado ($\overline{V} = 0$).
2. El flujo de masa dentro del volumen de control y el estado termodinámico en cada punto no varía con el tiempo.
3. El flujo de masa que atraviesa la superficie de control y el estado termodinámico de esta masa en cada elemento de área es invariable en el tiempo.
4. La rapidez de transferencia de calor y trabajo a través de la frontera de volumen de control es constante.

Del punto (1):

No hay cambios de Energía Cinética y ni de Energía Potencial del sistema termodinámico

Del punto (2) de la Ec. de Continuidad:

$$\oiiint_{vc} \rho dV = 0$$

Del punto (2) de la Ec. de la 1ª Ley de la Termodinámica:

$$\frac{d}{dt} \oiiint_{vc} e\rho dv = 0$$

Por lo tanto, la Ec. de la Continuidad se simplifica:

$$\oiint_{sc} \rho c_r \cos\alpha dA = 0$$

Para un número finito de entradas y salidas:

$$\oint\!\!\oint_{sc} \rho c_r \cos\alpha \, dA = \sum_{s=1}^{m} \dot{M}_s - \sum_{e=1}^{n} \dot{M}_e = 0$$

En la mayoría de las TM se tiene una entrada y una salida, por tanto:

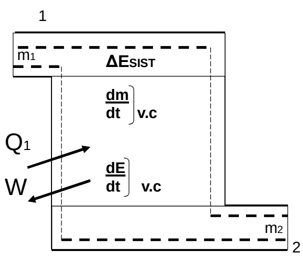
$$\dot{M}_2 = \dot{M}_1$$

El desarrollo del término de la energía específica:

$$e = \frac{1}{2}\overline{V}^2 + gZ + u$$

Que sustituido en la Ec. de la 1ª Ley de la Termodinámica y con los flujos de masa correspondientes:

$$\oint\!\!\oint_{sc} (e + Pv) \rho c_r \cos\alpha \, dA = \sum_{s=1}^{m} M_s \left(\frac{1}{2}\overline{V}^2 + gZ + u + Pv\right)_s - \sum_{e=1}^{n} M_e \left(\frac{1}{2}\overline{V}^2 + gZ + u + Pv\right)_e$$



ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD

$$\sum_{s=1}^{m} \dot{M}_s - \sum_{e=1}^{n} \dot{M}_e = \left.\frac{dm}{dt}\right|_{v.c}$$

$$\dot{M} = \rho \overline{V} A \text{ (kg/s)}$$

Flujo de masa:
Cantidad de masa por unidad de tiempo.

1ª LEY DE LA TERMODINÁMICA

$$\dot{Q} + \dot{W}_{eje} = \left.\frac{dE}{dt}\right|_{v.c} + \sum_{s=1}^{m} \dot{M}_s \left[1/2\,\overline{V}^2 + gZ + u + Pv\right]_s - \sum_{e=1}^{n} \dot{M}_e \left[1/2\,\overline{V}^2 + gZ + u + Pv\right]_e$$

Si se tiene una entrada y una salida:

- Condiciones de flujo estable:

$$\left.\frac{dm}{dt}\right]_{v.c.} = 0$$

- Condiciones de estado estable:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right]_{v.c.} = 0$$

$$\dot{Q} + \dot{W}_{eje} = \dot{M}\left[1/2(\overline{V}_2^2 - \overline{V}_1^2) + g(Z_2 - Z_1) + (u_2 + P_2 v_2) - (u_1 + P_1 v_1)\right];$$

$$h = u + Pv \left(\frac{J}{kg}\right); \left(\frac{N}{m^2}\right)\left(\frac{m^3}{kg}\right) = \left(\frac{J}{kg}\right)$$

1ª Ley de la Termodinámica

- Una entrada y una salida

$$\dot{Q} + \dot{W}_{eje} = \dot{M}\left[1/2(\overline{V}_2^2 - \overline{V}_1^2) + g(Z_2 - Z_1) + (h_2 - h_1)\right] \text{ (W)}$$

$$\left(\frac{kg}{s}\,\frac{m}{s^2} - m\right) = \frac{N - m}{s} = \frac{J}{s} = \text{(W)}$$

ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD:

$$M_1 = M_2;$$

$$\dot{M}\left[\left(\frac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{m}{s}\right)\left(m^2\right)\right] = \left(\frac{kg}{s}\right)$$

2da. LEY DE LA TERMODINÁMICA PARA SISTEMAS ABIERTOS CON GASES IDEALES Y REALES

BALANCES DE ENTROPÍA PARA UN VOLUMEN DE CONTROL

El concepto de entropía que se ha desarrollado para sistemas aislados y cerrados nos ha permitido evaluar las variaciones de entropía cuando la cantidad de masa es constante. Con base en el desarrollo matemático de la 1ª Ley de la Termodinámica para un Sistema Abierto, bajo la metodología de Volumen de Control, se puede desarrollar el balance de entropía para un Volumen de Control con la siguiente expresión:

$$\frac{dS_{vc}}{dt} = \frac{dS_{mc}}{dt} + \sum_{s=1}^{m} M_s s_s - \sum_{e=1}^{n} M_e s_e$$

En esta ecuación, “s” la entropía específica asociada a la masa que entra o sale del Volumen de Control. Esto es análogo al uso de “e” para la energía específica que entra o sale del Volumen de Control. Además, el balance de entropía para una masa constante, desarrollado anteriormente, se puede establecer en lo general como:

$$\frac{dS_{mc}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{T_j} + \frac{dS}{dt}$$

La sustitución en la Ec. anterior proporciona una expresión del **balance de entropía para un Volumen de Control,** esto es:

$$\frac{dS_{VC}}{dt} = \sum_{s=1}^{m} m_s s_s - \sum_{e=1}^{n} m_e s_e + \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{T_j} + \frac{dS}{dt} \quad \dots (12)$$

Donde después del primer miembro tienen en cuenta el transporte y la generación de entropía en el volumen de control.

Por lo tanto, las tres contribuciones físicas a la variación de entropía en cualquier Volumen de Control están asociadas a la transferencia de masa, la transferencia de calor y las irreversibilidades internas. Las dos primeras contribuciones cuando existen, pueden ser positivas o negativas. El término Q_j/T_j cuando existe es siempre positivo, puede ser difícil de evaluar númericamente porque éstos valores no se conocen en todas las partes de la superficie de control.

Esta dificultad de cálculo, puede evitarse por dos procedimientos. Primero, cuando la variación de T_j a lo largo de la frontera del Volumen de Control es bastante pequeña, resulta razonablemente preciso sustituir T_j por una tempertura de frontera de temperatura constante T_f. Es decir: variación de la entropía con el tiempo debida al flujo de calor es igual a :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{T_j} \approx \frac{Q_j}{T_f}$$

La segunda aproximación consiste en colocar la superficie de control donde se conocen las temperaturas de frontera. Si esto amplía el Volumen de Control puede contener tanto una pared del equipo como una capa de aire contigua a la pared. A menudo resulta razonable despreciar la masa adicional de esta región en los balances de energía y entropía.

2ª LEY DE LA TERMODINÁMICA BAJO CONDICIONES DE FLUJO Y ESTADO ESTABLES

1. El volumen del control se fija al sistema coordenado (V = 0).
2. El flujo de masa dentro del volumen de control y el estado termodinámico en cada punto no varía con el tiempo.
3. El flujo de masa que atraviesa la superficie de control y el estado termodinámico de esta masa en cada elemento de área es invariable en el tiempo.
4. La rapidez de transferencia de calor y trabajo a través de la frontera de volumen de control es constante.

De igual manera, a como se aplicó con la 1ª Ley de la Termodinámica estas condiciones de operación simplifican la evaluación de la variación de entropía para Sistemas Abiertos, quedando la Ec. (12) de la siguiente manera:

$$\frac{dS_{VC}}{dt} = \sum_{s=1}^{m} m_s s_s - \sum_{e=1}^{n} m_e s_e + \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{T_j} = 0 \ \ldots\ (13)$$